УДК 517.95

С. П. Лавренюк

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ С ОСТРЫМ КРАЕМ

В работе рассматривается смешанная задача для уравнения

$$u_{tt}+(a_0(x,t)u_{xx})_{xx}-(a_1(x,t)u_x)_x+a_2(x,t)u_x+a_3(x,t)u_t+a_4(x,t)u=f(x,t)$$

в области $Q=\{(x,t):0<x<l,\ 0<t<\infty\}$ в предположении, что $\nu_0x^\alpha\leqslant a_0(x,t)\leqslant\leqslant\mu_0x^\alpha$, $\nu_0>0$, $0<\alpha<2$. Получены условия устойчивости по Ляпунову нулевого решения указанной задачи.

Рассмотрим в области $Q=\{(x,t):0<x<l,\ 0<t<\infty\}$ уравнение

$$Lu\equiv u_{tt}+(a_0(x,t)u_{xx})_{xx}-(a_1(x,t)u_x)_x+$$
$$+a_2(x,t)u_x+a_3(x,t)u_t+a_4(x,t)u=f(x,t) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0<x<l. \tag{2}$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполняется условие

$$\nu_0x^\alpha\leqslant a_0(x,t)\leqslant\mu_0x^\alpha,\ \nu_0>0,\quad 0<\alpha<2,\ (x,t)\in Q. \tag{3}$$

Введем пространство $\overset{0}{H}{}^2_\alpha(0,l)$ как замыкание множества функций $C^2[0,l]$ в норме

$$\|v\|=\left[\int_0^l(x^\alpha v_{xx}^2+v_x^2+v^2+v_t^2)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Легко проверить, что для любой функции $v\in\overset{0}{H}{}^2_\alpha(0,l)$ справедливы равенства:

$$v(0,t)=v(l,t)=v_x(0,t)=v_x(l,t)=0,\quad 0<\alpha<1,$$
$$v(0,t)=v(l,t)=v_x(l,t)=0,\quad 1\leqslant\alpha<2.$$

Будем в дальнейшем рассматривать функцию $u(x,t)$ как отображение временного интервала в некоторое пространство функций переменной x. Определение различных пространств таких отображений см. в [1].

Основной вопрос данной статьи — исследование устойчивости решения $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2) и включениям

$$u\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;\ \overset{0}{H}{}^2_\alpha(0,l)),\ u_t\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;\ L^2(0,l)),\quad S=(0;+\infty). \tag{4}$$

Сначала выясним, при каких условиях указанное решение существует и является единственным.

Нам потребуются легко выводимые неравенства

$$\int_0^l v^2(x)\,dx\leqslant\varkappa_0\int_0^l x^\alpha v_{xx}^2(x)\,dx,$$
$$\int_0^l v_x^2(x)\,dx\leqslant\varkappa_1\int_0^l x^\alpha v_{xx}^2(x)\,dx, \tag{5}$$

справедливые для любой $v(x)\in\overset{0}{H}{}^2_\alpha(0,l)$. Здесь

$$\varkappa_0=\frac{l^{4-\alpha}(5-\alpha)}{3(2-\alpha)(4-\alpha)},\ \varkappa_1=\frac{l^{2-\alpha}}{2-\alpha}.$$

Теорема 1. Пусть выполняется условие (3) и, кроме того: $a_0 \in L^\infty(S; C[0, l])$; $|a_{0t}(x, t)| \leqslant Ax^\alpha$, $(x, t) \in Q$;

$$\sum_{k=1}^{4} |a_k(x, t)| + |a_{1t}(x, t)| + |a_{4t}(x, t)| \leqslant A, \quad (x, t) \in Q;$$

$$a_1(x, t) + \frac{\nu_0\gamma_1}{\varkappa_1} \geqslant \delta_0, \ a_4(x, t) + \frac{\nu_0\gamma_2}{\varkappa_0} \geqslant \delta_0, \quad (x, t) \in Q,$$

где δ_0, γ_1, γ_2 — некоторые положительные постоянные, причем $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$; $\varphi \in \overset{0}{H}{}^2_\alpha(0, l)$, $\psi \in L^2(0, l)$, $f \in L^2_{loc}(Q)$. Тогда существует решение $u(x, t)$ задачи (1), (2), для которого справедливы включения (4).

Доказательство. Пусть $\{\omega_k(x)\}$ базис пространства $\overset{0}{H}{}^2_\alpha(0, l)$. Рассмотрим уравнение (1) в области $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, \ 0 < t < T\}$. Выберем функцию

$$u^N(x, t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\, \omega_k(x),$$

где $c_k^N(t)$ определим как решение задачи

$$\int_0^l (u_{tt}^N \omega_k + a_0 u_{xx}^N \omega_{kxx} + a_1 u_x^N \omega_{kx} + a_2 u_x^N \omega_k + a_3 u_t^N \omega_k + a_4 u^N \omega_k - f\omega_k)\, dx = 0, \quad (6)$$

$$c_k^N(0) = \varphi_k^N, \ c_{kt}^N(0) = \psi_k^N, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Здесь φ_k^N и ψ_k^N — коэффициенты представлений

$$\varphi^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k^N \omega_k(x), \ \psi^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \psi_k^N \omega_k(x),$$

где $\varphi^N(x) \to \varphi(x)$ в $\overset{0}{H}{}^2_\alpha(0, l)$, а $\psi^N(x) \to \psi(x)$ в $L^2(0, l)$ при $N \to \infty$.

Если умножить (6) на функцию $c_{kt}^N(t)$, просуммировать по k от 1 до N, проинтегрировать по промежутку $[0, \tau]$, $0 < \tau \leqslant T$, то после несложных преобразований, с учетом условий теоремы и неравенств (5), нетрудно получить оценку

$$\int_0^l [(u_t^N)^2 + x^\alpha (u_{xx}^N)^2 + (u_x^N)^2 + (u^N)^2]\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C\left[\int_0^l (\varphi^2 + \varphi_x^2 + x^\alpha \varphi_{xx}^2 + \psi^2)\, dx + \int_{Q_T} f^2 dx dt\right],$$

где постоянная C не зависит от N и T.

Положим теперь $T = 1$. Тогда в силу последнего неравенства существует подпоследовательность $\{u^{k,1}(x, t)\}$, такая, что

$$u^{k,1} \to u_1 \ \text{✳-слабо в} \ L^\infty((0, 1); \overset{0}{H}{}^2_\alpha(0, l)),$$
$$u_t^{k,1} \to u_{1t} \ \text{✳-слабо в} \ L^\infty((0, 1); L^2(0, l)).$$

Положим теперь $T = 2$ и из $\{u^{k,1}(x, t)\}$ выберем подпоследовательность $\{u^{k,2}(x, t)\}$, такую, что

$$u^{k,2} \to u_2 \ \text{✳-слабо в} \ L^\infty((0, 2); \overset{0}{H}{}^2_\alpha(0, l)),$$
$$u_t^{k,2} \to u_{2t} \ \text{✳-слабо в} \ L^\infty((0, 2); L^2(0, l)).$$

Продолжая этот процесс для $T = 3, 4, 5, \ldots$, мы получаем последовательность функций $\{u_k(x, t)\}$. Легко показать, что

$$u_k(x, t) \equiv u_{k-1}(x, t), \quad (x, t) \in Q_{k-1}, \ k = 2, 3, \ldots$$

Обозначим через $u(x, t)$ функцию, которая для каждого k в Q_k совпадает с $u_k(x, t)$. Тогда

$$u^{k,k} \to u \ \divideontimes\text{-слабо в } L^\infty_{\text{loc}}(S; \overset{0}{H}{}^2_\alpha(0, l)),$$

$$u_t^{k,k} \to u_t \ \divideontimes\text{-слабо в } L^\infty_{\text{loc}}(S; L^2(0, l)).$$

Далее, аналогично [2, с. 26], можно показать, что $u(x, t)$ будет решением задачи (1), (2).

Теорема 2. Пусть выполняется условие (3) и, кроме того: $|a_{0t}(x, t)| \leqslant \leqslant Ax^\alpha$, $(x, t) \in Q$;

$$\sum_{m=1}^{4} |a_m(x, t)| + |a_{3t}(x, t)| + |a_{2x}(x, t)| \leqslant A, \quad (x, t) \in Q;$$

$$a_1(x, t) + \frac{\nu_0(1-\gamma_0)}{\varkappa_1} \geqslant \delta_1, \quad (x, t) \in Q,$$

где γ_0, δ_1 — положительные постоянные, причем $\gamma_0 < 1$. Тогда задача (1), (2) не может иметь более одного решения, удовлетворяющего включениям (4).

Доказательство этой теоремы проводится по схеме [3, с. 211].

При исследовании устойчивости будем полагать, что $f(x, t) \equiv 0$. Введем обозначение

$$\rho(u, t) = \left[\int_0^l (x^\alpha u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2 + u_t^2)\, dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия существования и единственности решения уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющего условиям (2) и включениям (4) и, кроме того, $a_{0t}(x, t) \leqslant 0$, $a_{1t}(x, t) \leqslant 0$, $a_3(x, t) \geqslant 0$, $a_{4t}(x, t) \leqslant 0$, $(x, t) \in Q$; существует такое число $\mu \geqslant 0$, что

$$\mu\left[a_1(x, t) + \frac{\nu_0\gamma_1}{\varkappa_1}\right] - \frac{a_2^2(x, t)}{a_3(x, t) + \mu} \geqslant 0, \quad (x, t) \in Q.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия $\rho(u, 0) < \delta$ следует неравенство

$$\rho(u, t) < \varepsilon \exp(\mu t), \quad t \in S.$$

Доказательство. Рассмотрим множество функций $W = \{w(x, t) : w \in C^1(S; C^2[0, l]),\ w_{tt} \in L^\infty(S; L^2(0, l))\}$. При фиксированном $t \in S$ введем на W метрику по формуле

$$\rho_\mu(w_1, w_2) = \left\{\exp(-\mu t)\int_0^l [x^\alpha(w_{1xx} - w_{2xx})^2 + (w_{1x} - w_{2x})^2 + \right.$$

$$\left. + (w_1 - w_2)^2 + (w_{1t} - w_{2t})^2]\, dx\right\}.$$

Тогда W с метрикой ρ_μ образует метрическое пространство. Выделим в W класс функций W_N, удовлетворяющих системе уравнений

$$\int_0^l (a_0 w_{xx}\omega_{kxx} + a_1 w_x \omega_{kx} + a_2 w_x \omega_k + a_3 w_t \omega_k + a_4 w \omega_k +$$

$$+ w_{tt}\omega_k)\, dx = 0, \quad k = 1, \ldots, N,$$

условиям

$$w(x, 0) = \varphi^N(x), \ w_t(x, 0) = \psi^N(x)$$

и имеющих вид

$$w = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\, \omega_k(x).$$

Рассмотрим функционал

$$V(w, t) = \int_0^l \exp(-\mu t)(a_0 w_{xx}^2 + a_1 w_x^2 + a_4 w^2 + w_t^2)\, dx.$$

Из доказательства теоремы 1 следует существование чисел $\beta_0 > 0$, β_1, таких, что

$$\beta_0\rho_\mu^2(w, 0) \leqslant V(w, t) \leqslant \beta_1\rho_\mu^2(w, 0), \quad t \in S, \ w \in W_N.$$

Несложно проверить, используя условия теоремы, что

$$\frac{dV(w, t)}{dt} = -2\int_0^l \exp(-\mu t)(a_3w_t + a_2w_x)w_t dx +$$
$$+\int_0^l \exp(-\mu t)[a_{0t}w_{xx}^2 + a_{1t}w_x^2 + a_{4t}w^2 - \mu(a_0w_{xx}^2 +$$
$$+ a_1w_x^2 + a_4w^2 + w_t^2)]\, dx \leqslant 0, \quad t \in S, \ w \in W_N.$$

Следовательно, на основании теоремы об устойчивости [4] получаем утверждение теоремы 3 для функций из классов W_N. Поскольку решение нашей задачи можно представить как предел функций из классов W_N, то утверждение теоремы 3 вытекает из леммы 5.3 ([1, с. 20]).

Замечание. Если в теореме 3 можно выбрать $\mu = 0$, то из нее следует устойчивость нулевого решения нашей задачи в смысле определения работы [4].

Отметим, что устойчивость колебаний стержней и пластинок изучали многие авторы, в частности [4—6]. В настоящей статье сделана попытка исследовать устойчивость колебаний в случае стержня с острым краем. Такой стержень моделируется уравнением типа (1), которое вырождается на границе области (см. [7]).

1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1978.— 336 с.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М. : Мир, 1972.— 588 с.
3. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.— М. : Наука, 1973.— 408 с.
4. *Мовчан А. А.* О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем // Прикл. математика и механика.— 1959.— **23**, вып. 3.— С. 483—493.
5. *Plaut R. H.* Asymptotic Stability and instability criteria for some elastic systems by Liapunov's direct method // Quart. Appl. Math.— 1972.— **29**, N 4.— С. 535—540.
6. *Buis G. R., Vogt W. G.* Lyapunov functionals for a class of wave equation // Electron. Letters.— 1968.— **4**, N 7.— С. 128—130.
7. *Маховер Е. В.* О спектре собственных частот пластинки с острым краем // Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена.— 1958.— **197**.— С. 113—118.

Львов. гос. ун-т

Получено 09.07.90